

УДК 519.10

**УСТОЙЧИВОСТЬ ГРАДИЕНТНОГО АЛГОРИТМА  
В ТЕРМИНАХ КРИВИЗНЫ ДОПУСТИМОЙ ОБЛАСТИ****А.Б.РАМАЗАНОВ***Бакинский Государственный Университет*  
*ram-bsu@mail.ru*

*В настоящей работе установлена устойчивость градиентного алгоритма в терминах кривизны допустимой области.*

**Ключевые слова:** устойчивость, алгоритм, кривизна, выпуклость, градиент.

Устойчивость градиентного алгоритма в терминах гарантированных оценок означает выделение класса задач, для которого при “малых” возмущениях параметров задачи (в частности, кривизны допустимой области), гарантированные оценки для возмущенных задач не ухудшаются.

Основной целью настоящей работы является установление устойчивости градиентного алгоритма покоординатного подъема в терминах кривизны допустимой области.

Отметим, что это работа является расширенным вариантом статьи [1].

Пусть  $Z_+^n$  ( $R_+^n$ ) - множество  $n$  – мерных неотрицательных целочисленных (действительных) векторов и  $P \subseteq Z_+^n$ .

Будем в дальнейшем считать, что множество  $P$  обладает свойствами:

(i)  $|P| < \infty$ ;

(ii)  $0 = (0, \dots, 0) \in P$ ;

(iii)  $[0, x] = \{z \in Z_+^n \mid 0 \leq z \leq x\} \subseteq P$  для любого  $x \in P$ .

Множество удовлетворяющие условия i) – iii) как обычно (см., напр., [2]), будем называть конечное порядково-выпуклое множество с нулем.

Введем следующие обозначения:

$$N(x, y) = \{i \mid x_i < y_i, 1 \leq i \leq n\}, h(x, y) = \sum_{i \in N(x, y)} h(x_i, y_i),$$

$$h(x_i, y_i) = \left| \{z_i \mid x_i \leq z_i \leq y_i\} \right| - 1, 1 \leq i \leq n, h(x) = h(0, x),$$

$$\pi_i^+(x) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + 1, x_{i+1}, \dots, x_n),$$

$$h = h(P) = \max\{h(0, x) \mid x \in P\}, fes(x, P) = \{1 \leq i \leq n \mid \pi_i^+(x) \in P, x \in P\}.$$

Кривизной множества  $P \subseteq Z_+^n$  называется число (см.. напр., [2]):

$$\theta(P) = \min \left\{ \frac{l(P \cap [0, x])}{h(P \cap [0, x])} : x \in Z_+^n, x \neq 0 = (0, \dots, 0) \right\},$$

где

$$l(P) = \min\{h(x) : x \in P^{\max}\}, P^{\max} = \{x \in P : fes(x, P) = \emptyset\}.$$

Пусть  $\mathfrak{R}_\rho(Z_+^n)$  - класс  $\rho$ -координатно-выпуклых функций на  $Z_+^n$  [2, 3],

т.е. класс таких функций  $f : Z_+^n \rightarrow R$  (где  $R$  - множество действительных чисел), что выполняются неравенства

$$\Delta_{ij} f(x) \leq 0, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, \forall x \in Z_+^n, i \neq j,$$

$$\Delta_{ii} f(x) \leq -\rho_i, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \forall x \in Z_+^n,$$

где

$$\Delta_{ij} f(x) = \Delta_i f(\pi_j^+(x)) - \Delta_i f(x), \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\},$$

$$\Delta_i f(x) = f(\pi_i^+(x)) - f(x), \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \rho = (\rho_1, \dots, \rho_n) \in R_+^n.$$

## § 1. Постановка задачи

Рассматривается следующая задача  $A$  выпуклой дискретной оптимизации: найти

$$\max\{f(x) \mid x = (x_1, \dots, x_n) \in P \subseteq Z_+^n\},$$

где  $f(x) \in \mathfrak{R}_\rho(Z_+^n)$ ,  $f(x)$  - неубывающая функция на множестве  $P$ ,  $P$  - порядково-выпуклое множество.

Пусть  $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$  - оптимальное решение задачи  $A$ , т.е.  $f(x^*) = \max\{f(x) \mid x \in P\}$ .

Через  $x^g = (x_1^g, \dots, x_n^g)$  - обозначим градиентное решение задачи  $A$ , т.е.  $x^g$  - точка из  $P$ , полученная с помощью следующего градиентного алгоритма покоординатного подъема (см., напр., [2, 3]):

$$x^{t+1} = \pi_{i(t)}^+, t = 0, 1, \dots, x^0 = 0 = (0, \dots, 0),$$

$$i(t) = \arg \max_i \{\Delta_i f(x^t) : i \in fes(x^t, P)\},$$

заканчивающего свою работу на шагу  $\tau$ , если  $\Delta_{i(\tau)} f(x^\tau) \leq 0$  или  $f \in s(x^\tau, P) = \emptyset$ .

Под гарантированной (относительной) оценкой погрешности градиентного алгоритма решения задачи  $A$ , как обычно, понимают такое число  $\varepsilon \geq 0$ , что

$$\frac{f(x^*) - f(x^s)}{f(x^*) - f(0)} \leq \varepsilon .$$

Пусть  $\varepsilon(\delta)$  и  $\varepsilon$  соответственно гарантированные оценки возмущенной задачи  $A^\delta$  и исходной задачи  $A$ . Градиентный алгоритм покоординатного подъема назовем устойчивым (см., напр., [3]) для задачи  $A$ , если

$$\varepsilon(\delta) \leq K(\delta)\varepsilon ,$$

где  $K(\delta) \rightarrow 1$  при  $\delta \rightarrow 0$ .

Пусть  $\varepsilon(\delta)$  и  $\varepsilon$  соответственно гарантированные оценки возмущенной задачи  $A^\delta$  и исходной задачи  $A$ . Градиентный алгоритм покоординатного подъема назовем не устойчивым для задачи  $A$ , если  $\varepsilon(\delta) > \varepsilon$ .

По существу устойчивость (не устойчивость) градиентного алгоритма в терминах гарантированных оценок означает выделение класса задач, для которого при “малых” возмущениях параметров задачи (в частности, кривизны допустимой области), гарантированные оценки для возмущенных задач не ухудшаются (ухудшаются).

Основной целью настоящей работы является установление устойчивости градиентного алгоритма покоординатного подъема для задачи  $A$  в терминах кривизны допустимой области.

## § 2. Основные результаты

Пусть  $P(\delta)$  порядково-выпуклое множество и выполняются следующие условия:

- 1).  $P \subseteq P(\delta)$ ;
- 2).  $\theta(P(\delta)) \geq \theta(P)$ .

Возмущение задачи  $A$  определим следующим образом:

$$\max \{ f(x) : x \in P(\delta) \}$$

и назовем эту задачу  $A(\delta)$ .

**Теорема 1.** Множество задач  $A(\delta)$  не пусто.

**Доказательство.** Для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что  $P(\delta) \neq \emptyset$ .

Пусть

$$P = \bigcap_{i=1}^m P_i,$$

где

$$P_i = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in Z_+^n : g_i(x) \leq 0, g_i(0) \leq 0, -g_i(x) \in \mathfrak{R}_q(Z_+^n), i = 1, \dots, m\},$$

$g_i(x)$  - неубывающие функции,  $q = (q_1, \dots, q_n) \in R_+^n, q_1 + q_2 + \dots + q_n > 0$ .

Предположим, что

$$g_k(x) = \max_i \{g_i(x) : i = 1, 2, \dots, m\}.$$

Покажем, что  $P \subseteq P_k$ .

Пусть

$$\forall z = (z_1, \dots, z_n) \in P.$$

Тогда

$$z = (z_1, \dots, z_n) \in P_i, \forall i \in \{1, \dots, m\}.$$

Учитывая, что

$$g_i(z) \leq g_k(z) = \max_i \{g_i(z) : i = 1, 2, \dots, m\}, \forall i \in \{1, \dots, m\},$$

имеем

$$P_i \subseteq P_k, \forall i \in \{1, \dots, m\}.$$

Поэтому

$$P = \bigcap_{i=1}^m P_i \subseteq P_k.$$

В силу определения кривизны, находим  $\theta(P_k) \geq \theta(P)$ . Другими словами, выполняются условия 1) и 2).

Поэтому в качестве  $P(\delta)$  можно взять множество  $P_k$ .

Теорема 1 доказана.

**Теорема 2.** В условиях 1) и 2) задача  $A$  устойчиво в терминах гарантированных оценок.

**Доказательство.** Пусть  $\varepsilon$  и  $\varepsilon(\delta)$  соответственно гарантированные оценки градиентного алгоритма для задачи  $A$  и  $A(\delta)$ . Из теоремы 1 [2], имеем

$$\varepsilon = \frac{1}{1 + \theta(P)}, \quad \varepsilon(\delta) = \frac{1}{1 + \theta(P(\delta))}.$$

Отсюда с учетом условия 2), находим

$$\varepsilon(\delta) \leq \varepsilon,$$

т.е. градиентный алгоритм в задаче  $A$  в терминах гарантированных оценок устойчив.

Теорема 2 доказана.

### § 3. Замечание. Примеры

**Замечание.** Условие 1) и 2) являются достаточным, но не необходимым.

Действительно, пусть  $\varepsilon(\delta) < \varepsilon$ . Тогда очевидно, что  $\theta(P(\delta)) > \theta(P)$ . Покажем, что условие 1) могут и не выполняться. Для этого построим соответствующий пример.

**Пример 1.** Пусть

$$P = \{(x_1, x_2) \in Z_+^2 : 3x_1 + x_2 \leq 3\},$$

т.е.

$$P = \{(0,0), (0,1), (1,0), (0,2), (0,3)\}$$

и

$$P(\delta) = \{(x_1, x_2) \in Z_+^2 : 2x_1 + x_2 \leq 2\},$$

т.е.

$$P(\delta) = \{(0,0), (0,1), (1,0), (0,2)\}.$$

Рассмотрим задачи (1):

$$\max \{f(x_1, x_2) = -x_1^2 + 7x_1 - x_2^2 + 6x_2 : x = (x_1, x_2) \in P\} \quad (1)$$

и задачи (2):

$$\max \{f(x_1, x_2) = -x_1^2 + 7x_1 - x_2^2 + 6x_2 : x = (x_1, x_2) \in P(\delta)\} \quad (2)$$

Очевидно, что

$$\theta(P(\delta)) = 1/2 > 1/3 = \theta(P).$$

Легко найти, что на множество  $P$  для задачи (1) соответственно градиентное и оптимальное решение (их обозначим соответственно  $x_P^g$  и  $x_P^*$ ) являются  $x_P^g = (1,0)$ ,  $x_P^* = (0,3)$ .

Аналогично, для задачи (2) на множество  $P(\delta)$  градиентное и оптимальное решение (их обозначим соответственно  $x_{P(\delta)}^g$  и  $x_{P(\delta)}^*$ ) являются  $x_{P(\delta)}^g = (1,0)$ ,  $x_{P(\delta)}^* = (0,2)$ .

Поэтому, если обозначить соответственно гарантированные оценки для задачи (1) и (2) через  $\varepsilon$  и  $\varepsilon(\delta)$ , то имеем

$$\varepsilon = \frac{f(x_P^*) - f(x_P^g)}{f(x_P^*) - f(0)} = \frac{9 - 6}{9} = \frac{1}{3},$$

$$\varepsilon(\delta) = \frac{f(x_{P(\delta)}^*) - f(x_{P(\delta)}^g)}{f(x_{P(\delta)}^*) - f(0)} = \frac{8 - 6}{8} = \frac{1}{4},$$

$$\varepsilon(\delta) < \varepsilon.$$

Поэтому задача (1) в терминах гарантированных оценок устойчиво. Но очевидно, что  $P \not\subset P(\delta)$ , т.е. условие 1) не выполняется.

**Пример 2.** Пусть

$$P = \{(x_1, x_2) \in Z_+^2 : 2x_1 + x_2 \leq 2\},$$

т.е.

$$P = \{(0,0), (0,1), (1,0), (0,2)\}$$

и

$$P(\delta) = \{(x_1, x_2) \in Z_+^2 : 1.5x_1 + x_2 \leq 3\},$$

т.е.

$$P(\delta) = \{(0,0), (1,0), (2,0), (0,1), (0,2), (0,3)\}.$$

Рассмотрим задачи (3):

$$\max\{f(x_1, x_2) = -x_1^2 + 7x_1 - x_2^2 / 2 + 5x_2 : x = (x_1, x_2) \in P\} \quad (3)$$

и задачи (4):

$$\max\{f(x_1, x_2) = -x_1^2 + 7x_1 - x_2^2 / 2 + 5x_2 : x = (x_1, x_2) \in P(\delta)\} \quad (4)$$

Очевидно, что

$$\theta(P(\delta)) = 2/3 > 1/2 = \theta(P), P \subset P(\delta).$$

Легко найти, что на множество  $P$  для задачи (3) соответственно градиентное и оптимальное решение (их обозначим соответственно  $x_P^g$  и  $x_P^*$ ) являются  $x_P^g = (1,0)$ ,  $x_P^* = (0,2)$ .

Аналогично, для задачи (4) на множество  $P(\delta)$  градиентное и оптимальное решение (их обозначим соответственно  $x_{P(\delta)}^g$  и  $x_{P(\delta)}^*$ ) являются  $x_{P(\delta)}^g = (2,0)$ ,  $x_{P(\delta)}^* = (0,3)$ .

Поэтому, если обозначить соответственно гарантированные оценки для задачи (3) и (4) через  $\varepsilon$  и  $\varepsilon(\delta)$ , то имеем

$$\varepsilon = \frac{f(x_P^*) - f(x_P^g)}{f(x_P^*) - f(0)} = \frac{8 - 6}{8} = \frac{1}{4},$$

$$\varepsilon(\delta) = \frac{f(x_{P(\delta)}^*) - f(x_{P(\delta)}^g)}{f(x_{P(\delta)}^*) - f(0)} = \frac{0.5}{10.5} = \frac{1}{21},$$

т.е.  $\varepsilon(\delta) < \varepsilon$ .

Поэтому задача (3) в условиях 1) и 2) в терминах гарантированных оценок устойчиво.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ramazanov A.B. The Analysis of Stability of Gradient Algorithm for Problems of Convex Discrete Optimization // Mat.-s XVI Baikal International School-Seminar "Optimization Methods and their Applications", Irkutsk, 2014, pp. 87-92.
2. Рамазанов А. Б. Оценки точности получаемых алгоритмом покоординатного подъема решений задач дискретной выпуклой оптимизации // Дискретный анализ и исследование операций. 2005, Серия 1, т. 12, № 4, с. 60-80.
3. Ramazanov A.B. On Stability of the Gradient Algorithm in Convex Discrete Optimisation Problems and Related Questions // Discrete Mathematics and Applications, 2011, v. 21, issue 4, p. 465-476.

**QRADİYENT ALQORİTMİN MÜMKÜN HƏLLƏR ÇOXLUĞUNUN ƏYRİLİYİ  
TERMİNİNDƏ DAYANIQLIĞI**

**Ə.B. RAMAZANOV**

**XÜLASƏ**

Məqalədə mümkün həllər çoxluğunun əyriliyi terminində qradiyent alqoritmin dayanıqlığı alınmışdır.

**Aşar sözlər:** dayanıqlıq, alqoritm, əyrilik, qabarıq, qradiyent

**STABILITY OF GRADIENT ALGORITHM UNDER THE TERM OF  
CURVATURE ADMISSIBLE DOMAIN OF SOLUTIONS**

**A.B.RAMAZANOV**

**SUMMARY**

In this paper stability of the gradient algorithm under the term of curvature admissible domain of solutions is found.

**Keywords:** stability, algorithm, curvature, convex, gradient

*Поступила в редакцию: 03.03.2015 г.*

*Подписано к печати: 18.06.2015 г.*